ESERCIZI SULLE SERIE

Studiare le seguenti due serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^6}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{a)}$ La serie data si può scrivere anche $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x^4})^n$ (per le proprietà delle potenze), e quindi è una serie geometrica del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, dove $q = e^{x^4}$ (che non dipende da n). Per studiare la nostra serie geometrica, poniamo ad esempio $q \geq 1$ (notiamo che una serie geometrica **diverge** se e solo se $q \geq 1$). Si ha: $q \geq 1$ se e solo se $e^{x^4} \geq 1 = e^0$ $\Leftrightarrow x^4 \geq 0$, che è sempre vero. Quindi la serie a) **diverge** per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{b)}$ La serie data si può scrivere anche $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x^6})^n$, serie geometrica del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, dove $q = e^{-x^6}$ (che non dipende da n).

Studiamo ora la DIVERGENZA. La nostra serie diverge se e solo se $q \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x^6} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow -x^6 \geq 0 \Leftrightarrow$ $x^6 \leq 0$, e questo è possibile se e solo se $x = 0$ (ottenendo $x^6 = 0$). Dunque la nostra serie diverge se e solo se $x = 0$. Per $x \neq 0$, la nostra serie CONVERGE: infatti non diverge, non è indeterminata (perché a termini positivi) e quindi, per esclusione, converge. N.B.: Si può vedere anche così: poniamo $-1 < q < 1$ (cioè la convergenza della serie geometrica in generale): nel nostro caso ci basta $0 < q < 1$ perché q è sempre positivo. Si ha $0 < q < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^{-x^6} < 1 = e^0 \Leftrightarrow -x^6 < 0 \Leftrightarrow x^6 > 0$, e questo vale $\Leftrightarrow \boxed{x \neq 0}$.

– 0 bis –

Esercizio: Studiare la serie (0) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{(7-x)n^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Notiamo che (0) non è una serie armonica generalizzata. Non è neanche una serie geometrica, perché il termine generale $a_n = e^{(7-x)n^2}$ si scrive anche $\left[e^{(7-x)n}\right]^n$ per le proprietà delle potenze, MA l'espressione dentro le parentesi quadre CONTIENE la n, e quindi (0) non può essere una serie geometrica.

Poiché e elevato a qualsiasi cosa è sempre positivo, abbiamo che la nostra serie è a termini positivi; e dunque passiamo ai criteri. In questo caso, applichiamo il criterio della radice.

Per le proprietà delle potenze, si ha

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(e^{(7-x)n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{(7-x)\cdot n^2 \cdot \frac{1}{n}} = e^{(7-x)n}$$

Per studiare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$, conviene distinguere tre casi: a) $7-x>0$ (cioè $7>x$, ossia $x<7$); b) $7-x<0$ (cioè $7<x$, vale a dire $x>7$); c) $7-x=0$, cioè $x=7$, in quanto è opportuno studiare il segno dell'esponente (visto che a seconda di questo segno il comportamento della funzione esponenziale cambia). Nel caso a) si ha: $L = \lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{(7-x)n} = e^{+\infty} = +\infty > 1$ e quindi la serie DIVERGE. Nel caso b) si ha: $L = \lim_{n\to+\infty} e^{(7-x)n} = e^{-\infty} = 0 < 1$ e quindi la serie CONVERGE. Nel caso c) si ha $L = \lim_{n\to+\infty} e^0 = 1$ e il criterio della radice non ci fornisce informazioni. Che si fa allora?

Il caso c) ($x=7$) lo consideriamo come caso A PARTE, e quindi, semplicemente, AL POSTO DI x CI METTIAMO 7. La serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} e^{0\cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ (Il termine generale è $e^{(7-7)n^2} = e^0 = 1$). Se il termine generale a_n è uguale a 1 per ogni n, allora anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$, dunque, per $x=7$, la serie DIVERGE. Nel caso $x=7$, la nostra serie, che è $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$, può essere considerata anche come SERIE GEOMETRICA DI (RAGIONE) $q=1$, che DIVERGE.

a) Esercizio: Studiare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (N.B.: $0! = 1$)

Applichiamo il criterio del rapporto. Si ha: $a_n = \frac{1}{n!}$, $\frac{1}{a_n} = n!$,

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdots n}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$

Pertanto $\boxed{\ell} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 \boxed{< 1}$, perciò la serie CONVERGE.

b) Esercizio: Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Svolgimento: Visto che c'è $n!$, applichiamo il criterio del rapporto (la serie è a termini positivi). Si ha:

$a_n = \frac{n!}{n^n}$, $\frac{1}{a_n} = \frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, e quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \stackrel{\text{TRUCCO}}{=} \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)}}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{1 \cdot 2 \cdots n}} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \stackrel{2^\circ \text{ trucco}}{=} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$ Allora

$$\boxed{\ell} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \frac{n}{n+1}}$$

(pensiamo al numero di Nepero) = (proprietà delle potenze)

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = \left(e^{-1}\right)^{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}} = \left(e^{-1}\right)^1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \boxed{< 1}$$

$[\,] \to e^{-1}$

Procedimento alternativo: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \stackrel{3^\circ \text{ trucco}}{=} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$, quindi

$\boxed{\ell} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \boxed{< 1}$ (limite notevole sul numero di Nepero).

Dunque la serie data CONVERGE.

Esercizio: Studiare le due serie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

Sono due serie a termini positivi, c'è $n!$ e applichiamo il criterio del rapporto. Cominciamo dalla prima delle due serie. Si ha:

$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $\frac{1}{a_n} = \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, e dunque

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n}} =$$

$$= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$ Nell'esercizio precedente, abbiamo visto che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$, quindi $\boxed{l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot \frac{1}{e} \simeq \frac{2}{2,718} \boxed{<1}$, e pertanto la serie a) CONVERGE. Per quanto riguarda la seconda serie, si rifanno gli stessi passaggi come nella prima serie, con la differenza che c'è il numero 3 al posto del 2. Allora

$$\boxed{l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{e} \simeq \frac{3}{2,718} \boxed{>1},$$

e pertanto la serie b) DIVERGE.

<u>Esercizio</u>: Sia $t > 0$ un numero fissato. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \cdot e^{-n}$

Svolgimento. In ogni caso abbiamo che, al tendere di n a $+\infty$, la quantità e^{-n} è più veloce di n^{t-1}, e quindi il limite del termine generale è: $\lim_{n \to +\infty} n^{t-1} \cdot e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} e^{-n} = (e^{-\infty}) = 0$, e pertanto (fino a questo momento) non si può dire nulla.
Osserviamo che la nostra serie è a termini positivi, e quindi possiamo passare ai criteri. Per esercizio, risolviamo questa serie sia con il criterio della <u>radice</u> che con il criterio del <u>rapporto</u>.

Criterio della <u>radice</u>: Si ha: $a_n = n^{t-1} \cdot e^{-n}$, quindi

$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(n^{t-1} \cdot e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(n^{t-1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} =$ (proprietà delle potenze) $n^{(t-1)\cdot\frac{1}{n}} \cdot e^{-\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}} = n^{\frac{1}{n}\cdot(t-1)} \cdot e^{-1} =$
$= \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{(t-1)} \cdot \frac{1}{e}$, e pertanto, siccome $\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (limite "quasi notevole"), segue che

$\boxed{L} = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1^{t-1} \cdot \frac{1}{e} = 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \boxed{< 1}$. La serie <u>CONVERGE</u>.

Criterio del <u>rapporto</u>: Si ha: $a_{n+1} = (n+1)^{t-1} \cdot e^{-(n+1)}$,

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^{t-1} \cdot e^{-n}} = \frac{e^n}{n^{t-1}}$ (potenze ad esponente negativo),

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^{t-1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot e^{n}}{n^{t-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{t-1} \cdot e^{\cancel{-n}-1\cancel{+n}} =$
$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{e}$, da cui $\boxed{l} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{e} = 1^{t-1} \cdot \frac{1}{e} = 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \boxed{< 1}$.

Quindi si ottiene sempre che la serie <u>CONVERGE</u>.

ESERCIZIO $\boxed{-4-}$

Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$

Svolgimento: Notiamo che questa serie non è né geometrica né armonica generalizzata. Facciamo il limite del termine generale. Si ha: $l = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \cdot e^{-n^2} = (+\infty)\cdot 0$ (perché, diciamo, $e^{-\infty}=0$), ma l'esponenziale è più veloce, e quindi $l = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$. Quindi, fino a questo momento, non possiamo dire nulla. Allora notiamo che la serie data è a termini positivi, e quindi passiamo ai criteri. Questa serie la risolviamo sia col criterio della radice sia con quello del rapporto.

Criterio della radice: si ha: $a_n = n \cdot e^{-n^2}$, e quindi

$$a_n^{\frac{1}{n}} = (n\cdot e^{-n^2})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot (e^{-n^2})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-n^2\cdot\frac{1}{n}} \text{ (proprietà delle potenze)},$$

$$\boxed{L} = \lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-n}\right) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}}_{=1,\ \text{limite "quasi notevole"}} \cdot \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 1\cdot e^{-\infty} =$$

$= 1\cdot 0 = 0 \ \boxed{<1}$, e quindi la serie data CONVERGE.

Criterio del rapporto: si ha: $a_n = n\cdot e^{-n^2}$, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n\cdot e^{-n^2}} = \frac{e^{n^2}}{n}$,

$a_{n+1} = (n+1)\cdot e^{-(n+1)^2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = (n+1)\cdot e^{-(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n^2}}{n} =$

$= \frac{n+1}{n} \cdot e^{-(n+1)^2+n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot e^{\cancel{-n^2}-1-2n\cancel{+n^2}}$, e pertanto

$$\boxed{l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right)\cdot e^{-1-2n} = 1\cdot e^{-\infty} = 1\cdot 0 = 0 \boxed{<1},$$

e quindi la serie data CONVERGE.

ESERCIZIO:

Studiare ~~la~~ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-n^2 x} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

SVOLGIMENTO

Applichiamo il criterio della radice

$$a_n = \frac{1}{n^3} e^{-n^2 x}$$

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-nx}$$

Osserviamo che $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} (n^3)^{\frac{1}{n}}} =$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^{3\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3} = \frac{1}{1^3} = \boxed{1}$$

$$n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Pertanto il limite $L = \lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$ è uguale al

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{per } x>0 \to \text{la serie } \underline{\text{converge}} \\ +\infty & \text{per } x<0 \to \text{la serie } \underline{\text{diverge}} \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

non si può dire nulla (almeno per ora)

Però, se $x = 0$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \cancel{e^0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

armonica generalizzata di esponente $3>1$ (converge)

a) Esercizio: Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x+5}\right)^n$$

Si tratta di una serie geometrica del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ove $q = \frac{1}{\sin x+5}$. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $-1 \leq \sin x \leq 1$, e quindi $4 \leq \sin x+5 \leq 6$. In particolare $\sin x+5 > 1$. Passando ai reciproci, si ottiene $\frac{1}{\sin x+5} < 1$. Inoltre, essendo $\sin x+5 > 0$ (è >1 e quindi a maggior ragione è un numero positivo), allora anche il suo reciproco sarà positivo. Quindi $\frac{1}{\sin x+5} > 0$. Pertanto $0 < q < 1$, e allora la nostra serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Esercizio: Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\cos x+7)^n$$

Si tratta di una serie geometrica del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ove $q = \cos x+7$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $-1 \leq \cos x \leq 1$, e quindi $6 \leq \cos x+7 \leq 8$, da cui $q = \cos x+7 > 1$. Pertanto la nostra serie DIVERGE per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Esercizio: Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^8+11}{x^8+1}\right)^n$.
È una serie geometrica del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ove $q = \frac{x^8+11}{x^8+1}$. Si ha:
$q>1 \iff \frac{x^8+11}{x^8+1} > 1 \iff x^8+11 > x^8+1$ (è lecito, perché ho moltiplicato per un numero positivo e la disuguaglianza non cambia di segno) sempre vero $\forall x \in \mathbb{R}$.
Pertanto la serie data DIVERGE per ogni $x \in \mathbb{R}$.

<u>Esercizio</u>. Siano p e q due numeri <u>positivi</u> fissati, con <u>$p>1$</u>.
Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9p+1)^n + 5n^p + 17}{p^n + 18n^q + 11} \qquad \left(a_n = \frac{(9p+1)^n + 5n^p + 17}{p^n + 18n^q + 11}\right)$$

Calcoliamo il limite L del termine generale a_n. Applicando il principio di sostituzione degli infiniti, notiamo che, essendo $p>1$, sarà anche $9p+1>1$ e il termine più veloce al numeratore sarà $(9p+1)^n$, mentre il termine più veloce al denominatore sarà p^n, e quindi otteniamo

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{(9p+1)^n}{p^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{9p+1}{p}\right)^n = +\infty, \text{ in quanto}$$

$\frac{9p+1}{p} > 1$: infatti $\frac{9p+1}{p} > 1$ se e solo se $(\Longleftrightarrow)$ $9p+1>p$ (p è positivo...) $\Longleftrightarrow 8p+1>0$, il che è vero ($p>1$).

Pertanto il limite del termine generale è $+\infty$, che è diverso da 0, e quindi la serie data DIVERGE.

Esercizio: -8- Studiare la serie

NEW-

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^{1/12}}}-1\right)^3\cdot\left(\sin\frac{1}{n^{1/5}}\right)^4$$

<u>Svolgimento:</u> Applichiamo il criterio del confronto asintotico e la teoria dei limiti notevoli, tenendo conto che $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Si ha (con $x=\frac{1}{n^{1/5}}$):

$$1=1^4=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{1/5}}\right)^4}{\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{1/5}}\right)^4}{\frac{1}{n^{4/5}}}.$$

Quindi il secondo fattore del termine generale si comporta come $\frac{1}{n^{4/5}}$. Inoltre, $1=1^3=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^{1/12}}}-1\right)^3}{\left(\frac{1}{n^{1/12}}\right)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^{1/12}}}-1\right)^3}{\frac{1}{n^{1/4}}}$ (con $x=\frac{1}{n^{1/12}}$). Pertanto il primo fattore del termine generale si comporta come $\frac{1}{n^{1/4}}$.

(N.B.: Siccome $n\to+\infty$, allora le quantità $\frac{1}{n^{1/4}}$ ed $\frac{1}{n^{4/5}}$ tendono a 0, e quindi ha senso usare i limiti notevoli)

Pertanto la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}\cdot\frac{1}{n^{4/5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5+16}{20}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{21}{20}}}$$

che è serie armonica generalizzata del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ con $a=\frac{21}{20}\boxed{>1}$, e quindi CONVERGE.

Esercizio: Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n^{1/9}}\right)^3\cdot\left(\sin\frac{1}{n^{1/45}}\right)^{30}\cdot\frac{n^3}{5n^3+2}$$

Svolgimento: Si può vedere che la serie è a termini positivi, e quindi applichiamo il criterio del confronto asintotico. Poiché $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, ponendo $x=\frac{1}{n^{1/9}}$, notiamo che x tende a 0, in quanto $n\to+\infty$ ed anche $n^{1/9}$ tende a $+\infty$. Quindi

$$1=1^3=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n^{1/9}}\right)^3}{\left(\frac{1}{n^{1/9}}\right)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n^{1/9}}\right)^3}{\frac{1}{n^{1/3}}}$$

, e il primo fattore si comporta come $\frac{1}{n^{1/3}}$. Poiché $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, ponendo $x=\frac{1}{n^{1/45}}$, notiamo che x tende a 0, poiché $n\to+\infty$ e anche $n^{1/45}$ tende a $+\infty$. Si ha

$$1=1^{30}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{1/45}}\right)^{30}}{\left(\frac{1}{n^{1/45}}\right)^{30}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{1/45}}\right)^{30}}{\frac{1}{n^{2/3}}}$$

. Il secondo fattore si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{2/3}}$. Inoltre, poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{5n^3+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}}{5\cancel{n^3}}=\frac{1}{5}$ (principio di sostituzione degli infiniti), allora il terzo fattore si comporta come se fosse $\frac{1}{5}$, e quindi (tutta) la nostra serie si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}\cdot\frac{1}{n^{2/3}}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3+2/3}}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (serie armonica "tradizionale"), allora la serie data <u>DIVERGE</u>.

Esercizio: Sia q un intero positivo fissato. Studiare la serie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q^n)^q}{n!}}$$

Svolgimento: si tratta di una serie a termini positivi, notiamo che c'è il termine $n!$ e quindi, seguendo lo schema di risoluzione delle serie, applichiamo il criterio del rapporto. Si ha: $a_n = \frac{(q^n)^q}{n!} = \frac{q^{nq}}{n!} = \frac{q^{qn}}{n!} = \frac{(q^q)^n}{n!}$

(può essere scritto in tanti modi, applicando le proprietà delle potenze) Conviene scriverlo nell' ultima forma, perché dovremo valutare $\boxed{a_{n+1} = \frac{(q^q)^{n+1}}{(n+1)!}}$ e quindi un termine elevato alla $n+1$ si può semplificare con lo stesso termine elevato alla n

Si ha: $\frac{1}{a_n} = \frac{n!}{(q^q)^n}$, e pertanto

$$\boxed{l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(q^q)^{\cancel{n+1}}}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cdot\cancel{n!}}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(q^q)^n}} =$$

$$q^q\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = q^q\cdot 0 = \boxed{0} < 1$$, e quindi la serie converge.

N.B.: Abbiamo usato $\frac{(q^q)^{n+1}}{(q^q)^n} = \frac{\cancel{(q^q)^n}\cdot(q^q)^1}{\cancel{(q^q)^n}} = (q^q)^1 = q^q$,

$(n+1)! = (1\cdot2\cdot3\cdots n)(n+1) = n!\cdot(n+1)$

<u>Esercizio</u>: Siano α e β due numeri reali positivi fissati.
Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^\beta}} - 1\right) \cdot n^\alpha$

Si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del confronto asintotico, tenendo conto del limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Poniamo $x = \frac{1}{n^\beta}$: poiché n tende a $+\infty$ ed inoltre <u>β è positivo</u>, allora anche n^β tende a $+\infty$. Dunque, $x = \frac{1}{n^\beta}$ tende <u>veramente a 0, e</u> pertanto <u>possiamo</u> applicare il limite notevole. Per il criterio del confronto asintotico, $e^{\frac{1}{n^\beta}} - 1$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^\beta}$, e allora tutto il termine generale a_n si comporta come se fosse $\frac{1}{n^\beta} \cdot n^\alpha = \frac{1}{n^\beta \cdot n^{-\alpha}} = \frac{1}{n^{\beta - \alpha}}$ (per le proprietà delle potenze). Quindi la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$, che converge per $\beta - \alpha > 1$ e diverge per $\beta - \alpha \leq 1$

Esercizio: Studiare la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-7}\right)$$

(N.B.: n parte da 3: notiamo che deve essere $n^2-7\geq 0$, cioè $n^2\geq 7$, che è verificato per $n\geq 3$)

Seguendo lo schema di risoluzione, facciamo il limite del termine generale. Si tratta di una forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$. Come facciamo? Applichiamo il "trucco"
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, e quindi (dove ha senso) $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$

Poniamo $a=\sqrt{n^2+5}$, $b=\sqrt{n^2-7}$. Si ha: $a^2=n^2+5$, $b^2=n^2-7$,
$a^2-b^2=n^2+5-(n^2-7)=\cancel{n^2}+5-\cancel{n^2}+7=12$, e pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-7}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{12}{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}}=\frac{12}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{12}{+\infty}=0,$$ quindi (per ora) non possiamo dire nulla. Notiamo che è una serie a termini positivi: infatti $\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-7}>0 \iff \sqrt{n^2+5}>\sqrt{n^2-7} \iff$
$\iff \cancel{n^2}+5>\cancel{n^2}-7$ sempre vero. Pensiamo allora a qualche criterio.

Qual è l'idea? Il termine generale si comporta come se fosse $\dfrac{12}{2\sqrt{n^2}}=\dfrac{6}{n}$. Questo, al tendere di n a $+\infty$, cioè "asintoticamente".

Allora applichiamo il criterio del <u>confronto asintotico</u>, confrontando con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Allora, poniamo $b_n=\frac{1}{n}$ e facciamo $L=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Si ha

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{12}{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{12\,n}{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}}.$$ Notiamo che $\boxed{\frac{1}{L}}=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}}{12n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{12\sqrt{n^2}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-7}}{12\sqrt{n^2}}=\frac{1}{12}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+5}{n^2}}+$$

$$+\frac{1}{12}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2-7}{n^2}}=\frac{1}{12}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}}+\frac{1}{12}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\underbrace{\frac{7}{n^2}}_{\to 0}}=\frac{1}{12}\cdot 1+\frac{1}{12}\cdot 1=\frac{2}{12}=\boxed{\frac{1}{6}},$$

quindi $L=6$. Poiché $6>0$, $6\neq+\infty$, allora le due serie hanno lo stesso comportamento, per il criterio del confronto asintotico. La serie data <u>DIVERGE</u>, perché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ <u>DIVERGE</u>.

Esercizio. Sia $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+2)^q \cdot (x^2+1)^6} \quad \text{, al variare di } x \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi ($e^t > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$).
Facciamo il limite del termine generale ($a_n = e^{-(n+2)^q \cdot (x^2+1)^6}$)
Notiamo che, al tendere di n a $+\infty$, l'esponente tende a: $(-\infty) \cdot$ costante positiva $= -\infty$, quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = (e^{-\infty}) = 0$.
Pertanto, in questa fase, non possiamo dire nulla, e allora passiamo ai criteri. Applichiamo il criterio della <u>radice</u> e teniamo conto delle proprietà delle potenze. Si ha:

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(e^{-(n+2)^q \cdot (x^2+1)^6}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{n} \cdot (n+2)^q \cdot (x^2+1)^6}.$$

Ma $q \geq 2$, quindi $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot (n+2)^q = +\infty$ ("vince" il grado più grande, per il principio di sostituzione degli infiniti). Inoltre $(x^2+1)^6$ è una costante (strettamente) positiva, quindi, al tendere di n a $+\infty$, l'esponente tende a $-\infty$, e pertanto $L = (e^{-\infty}) = 0 \boxed{< 1}$. Questo vale <u>per ogni</u> $x \in \mathbb{R}$, e quindi il criterio della radice ci dice che la serie data <u>converge</u> per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZI SULLE SERIE

Esercizio 1

Studiare la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n^3+15}$$

Si tratta di una serie a segni alterni, del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \text{ , ove } b_n = \frac{n^3}{n^3+15}$$

La successione $(b_n)_n$ è a termini positivi.

Adesso, che cosa possiamo dire sul comportamento della successione $(b_n)_n$: crescente o decrescente?

L'idea è quella che $(b_n)_n$ si comporta come la successione

$\frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ strettamente crescente

Dimostriamo che $(b_n)_n$ è strettamente crescente, cioè

$b_n < b_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$b_n < b_{n+1} \overset{\text{(se e solo se)}}{\Longleftrightarrow} \frac{n^3}{n^3+15} < \frac{(n+1)^3}{(n+1)^3+15}$$

(si sostituisce n con $n+1$ IN TUTTO E PER TUTTO)

$$\iff n^3 \cdot \left[(n+1)^3 + 15\right] < (n+1)^3 \cdot (n^3 + 15) \iff$$

(<u>trucchetto</u>: distribuire in questo modo, come viene ora fatto)

$$\cancel{n^3 \cdot (n+1)^3} + 15\, n^3 < \cancel{(n+1)^3 \cdot n^3} + 15\,(n+1)^3 \iff$$

$\iff n^3 < (n+1)^3 \iff n < n+1$, il che è sempre vero.

Quindi la successione $(b_n)_n$ è a termini positivi e strettamente crescente. Pertanto, per il <u>3°</u> criterio di Leibnitz, la serie data è <u>INDETERMINATA.</u>

Esercizio 2: Studiare la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^4+9}{n^4}$$

Si tratta di una serie a segni alterni, del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, ove $b_n = \frac{n^4+9}{n^4} = 1 + \frac{9}{n^4}$

La successione $(b_n)_n$ è una successione a termini positivi.
Dimostriamo che $(b_n)_n$ è <u>strettamente</u> <u>decrescente</u>.
(L'idea può essere quella che la $(b_n)_n$ si comporta come la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)_n$, ovvero come la successione $\left(\left(\frac{1}{n}\right)_n\right)$. Proviamo dunque che $b_n > b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si ha: $b_n > b_{n+1}$ ~~se e solo se~~ $\iff 1 + \frac{9}{n^4} > 1 + \frac{9}{(n+1)^4} \iff$

$\iff \frac{\cancel{9}^{1}}{n^4} > \frac{\cancel{9}^{1}}{(n+1)^4} \iff$ (passando ai reciproci) $n^4 < (n+1)^4$

$\iff n < n+1$ (n è positivo), il che è sempre vero.

Quindi $(b_n)_n$ è <u>strettamente</u> <u>decrescente</u>. Inoltre si ha:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{9}{n^4}\right) = 1 + \frac{9}{+\infty} = 1+0 = 1 \boxed{\neq 0}$$

e pertanto, per il $\underline{\underline{2}}°$ criterio di Leibnitz, la serie data è INDETERMINATA.

Esercizio 3 : Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{x+7}}$$

Si tratta di una serie a segni alterni, del tipo

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, ove $b_n = \frac{1}{n^{x+7}}$, $(b_n)_n$ a termini positivi.

Per $x = -7$, si ha $b_n = \frac{1}{n^0} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

e quindi la nostra serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

serie geometrica del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ con $q = -1$,

che risulta essere INDETERMINATA.

Per $x > -7$, si ha $x + 7 > 0$. Dimostriamo ora che la successione $(b_n)_n$ è strettamente decrescente. Si ha:

$b_n > b_{n+1}$ se e solo se $\frac{1}{n^{x+7}} > \frac{1}{(n+1)^{x+7}}$ se e solo se,

passando ai reciproci (tenendo conto che siamo davanti a quantità positive) $n^{x+7} < (n+1)^{x+7}$ se e solo se $n < n+1$ (perché, essendo l'esponente $x+7$ positivo la disuguaglianza non cambia di segno), sempre vero.

Dunque, $b_n = \frac{1}{n^{x+7}}$, per $\boxed{x>-7}$, è una successione strettamente decrescente. Calcoliamo ora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{x+7}} = \frac{1}{(+\infty)^{\text{esponente positivo}}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Pertanto sono verificate le ipotesi del $\boxed{1^\circ}$ criterio di Leibnitz e quindi, per $x>-7$, la serie data CONVERGE.

Sia ora $x<-7$, quindi $x+7<0$. Sia $b_n = \frac{1}{n^{x+7}}$. Dimostriamo che, in questo caso, la successione $(b_n)_n$ è strettamente crescente, cioè $b_n<b_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Si ha:

$b_n<b_{n+1}$ se e solo se $\frac{1}{n^{x+7}} < \frac{1}{(n+1)^{x+7}}$

se e solo se (passando ai reciproci, come prima, e cambiando di segno) $n^{x+7} > (n+1)^{x+7}$ se e solo se $n<n+1$ (questa volta, poiché l'esponente $x+7$ è negativo, la disuguaglianza <u>cambia di segno</u>), sempre vero.

Facciamo un esempio. Poiché $n^{-10}=\frac{1}{n^{10}}$, $(n+1)^{-10}=\frac{1}{(n+1)^{10}}$, da $n<n+1$ si deduce $n^{10}<(n+1)^{10}$ (esponente positivo) e quindi, passando ai reciproci, $\frac{1}{n^{10}}>\frac{1}{(n+1)^{10}}$, cioè

$\boxed{n^{-10}>(n+1)^{-10}}$.

Abbiamo provato che la successione $(b_n)_n$

$\left(b_n = \frac{1}{n^{x+7}}, \text{ con } x<-7\right)$ è strettamente crescente.

Quindi, per il $\underline{\underline{3}}$° criterio di Leibnitz, per $x<-7$ la serie data è INDETERMINATA.

Ricapitolando, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{x+7}}$

$$\begin{cases} \underline{\text{converge}}, & \text{per } x>-7 \\ \text{è } \underline{\text{indeterminata}}, & \text{per } x\leq -7 \end{cases}$$

Esercizio 4 : Studiare, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n}$ $\quad a_n = \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n}$.

Innanzi tutto notiamo che, per $x=0$, la serie assume l'espressione $0+0+\ldots+0+\ldots \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ (converge a 0).

Studiamo ora la nostra serie per $x \neq 0$.

In questi casi, conviene studiare dapprima la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ove $c_n = \frac{n \cdot |x|^{n+1}}{8^n}$ (in quanto, nei casi di convergenza assoluta, si può già subito dedurre che la serie converge, e perché per le serie dei valori assoluti valgono i criteri per le serie a termini non negativi o positivi).

Sia $x \neq 0$ ed applichiamo il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Sostituendo n con $n+1$ in tutto e per tutto, si ha: $c_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot |x|^{n+2}}{8^{n+1}}$. Inoltre, $\frac{1}{c_n} = \frac{8^n}{n \cdot |x|^{n+1}}$.

Quindi, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = c_{n+1} \cdot \dfrac{1}{c_n} = \dfrac{(n+1)\cdot |x|^{n+2}}{8^{n+1}} \cdot \dfrac{8^n}{n\cdot |x|^{n+1}} =$

$=$ (tenendo conto delle proprietà delle potenze)

$= \dfrac{(n+1)\cdot \cancel{|x|^{n+1}} \cdot |x| \cdot \cancel{8^n}}{\cancel{8^n}\cdot 8 \cdot n \cdot \cancel{|x|^{n+1}}}$. Passando al limite, si ha

$l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\cdot |x|}{8n} =$ (le costanti moltiplicative si possono portare fuori dal segno di limite)

$= \dfrac{|x|}{8} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{|x|}{8} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{|x|}{8}\cdot 1 = \dfrac{|x|}{8}.$

Infatti, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{+\infty} = 1+0 = 1$.

Per il criterio del rapporto applicato alla serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, se $l<1$, cioè $\dfrac{|x|}{8}<1$, ossia $|x|<8$ (con $x\neq 0$), vale a dire $\boxed{-8<x<0}$ oppure $\boxed{0<x<8}$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ converge. Ciò equivale a dire che la serie di partenza, per questi valori di x, converge assolutamente, e quindi converge. Quindi, finora, possiamo dire che la serie data converge per $-8<x<8$ (perché converge anche nel punto $x=0$)

Se $|x|>8$, possiamo dire solamente che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, ma ancora niente a proposito della serie data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se $|x|=8$, allora il limite ℓ è 1 e non si può dire proprio nulla.

Ma osserviamo che, nel caso $x>8$, la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n}$ è a termini positivi, e quindi, analogamente come prima, si può applicare il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ottenendo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot x^{n+2}}{8^{n+1}} \cdot \frac{8^n}{n \cdot x^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot \cancel{x^{n+1}} \cdot x \cdot \cancel{8^n}}{\cancel{8^n} \cdot 8 \cdot n \cdot \cancel{x^{n+1}}} = \frac{(n+1)\cdot x}{8n}, \text{ e quindi}$$

$$\hat{\ell} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{8} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{x}{8} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{x}{8}\cdot 1 = \frac{x}{8}$$

(sostanzialmente gli stessi passaggi di prima)

ottenendo che per $\hat{\ell}>1$, cioè per $\underline{x>8}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>DIVERGE</u>.

Restano ora i casi: $x=8$, $x=-8$, $x<-8$.

Per $x=8$, la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n}$

è uguale a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 8^{n+1}}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cancel{8^n} \cdot 8}{\cancel{8^n}} = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n$

(la costante moltiplicativa si può portare fuori dal segno di serie, essendo una serie sostanzialmente il <u>limite</u> della successione delle somme parziali),

che diverge: infatti, nella serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$, il limite del termine generale è $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \neq 0$, e quindi questa serie <u>diverge</u>. Quindi, per $x=8$, la serie data DIVERGE.

Per $x=-8$, la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n}$ è uguale a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-8)^{n+1}}{8^n} =$ (proprietà delle potenze)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1} \cdot 8^{n+1}}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot \cancel{8^n} \cdot 8}{\cancel{8^n}} =$$

$= -8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$. Studiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$.

Questa serie è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, ove $b_n = n$ è una successione <u>strettamente crescente</u> di numeri reali positivi, e quindi è <u>indeterminata</u> per il $\underline{\underline{3°}}$ criterio di Leibnitz. Allora anche la serie $-8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ è indeterminata. Dunque, per $x=-8$, la serie data È <u>INDETERMINATA</u>.

Consideriamo ora il caso $x < -8$. La serie data è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{8^n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{8^n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{8}\right)^n$$

Poniamo $\frac{x}{8} = w$, $t = -w$: allora $w = \frac{x}{8} < -1$, e quindi $t > 1$, e la serie data assume la forma

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot w^n \xrightarrow[w^n = (-1)^n t^n]{w = -t} x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot t^n, \text{ con } \boxed{t > 1}.$$

Studiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n t^n$ $(t > 1)$.

È una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, ove $b_n = n \cdot t^n$

Notiamo che la successione $(b_n)_n$ è a termini positivi.

Dimostriamo ora che la successione $(b_n)_n$ è <u>strettamente crescente</u>, cioè $b_n < b_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$b_n < b_{n+1} \xLeftrightarrow{\text{(se e solo se)}} n \cdot t^n < (n+1) \cdot t^{n+1} \Longleftrightarrow$$

$n \cdot \cancel{t^n} < (n+1) \cdot \cancel{t^n} \cdot t$, e questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Infatti si ha: $n < n+1 < (n+1)t$, quest'ultima disuguaglianza dovuta al fatto che $t > 1$.

Quindi $(b_n)_n$ è <u>strettamente crescente</u>. Sono pertanto verificate le ipotesi del <u>3°</u> criterio di Leibnitz, e pertanto, per $x < -8$, la serie è <u>INDETERMINATA</u>.

Quindi anche la serie data, cioè $x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n\, t^n$, è <u>indeterminata</u> per $x < -8$.

Ricapitolando, la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n+1}}{8^n}$:

converge (assolutamente), per $-8 < x < 8$;

diverge, per $x \geq 8$;

è indeterminata, per $x \leq -8$.

Esercizio

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n}{n \cdot x^{n+2}}$$

Si ha: $a_n = \dfrac{12^n}{n\, x^{n+2}} = \dfrac{1}{n x^2} \cdot \dfrac{12^n}{x^n} = \left(\dfrac{12}{x}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n x^2}$

(a_n è il termine generale)

Consideriamo dapprima il caso $\boxed{0 < x < 12}$.

Poniamo $K = \dfrac{12}{x}$. Si ha $K > 1$ (teniamo conto che $x > 0$, e quindi possiamo dividere per x senza cambiare il segno...), e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} K^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \lim_{n \to +\infty} K^n \cdot \frac{1}{n}$$

(x è <u>fissato</u>, quindi $\dfrac{1}{x^2}$ è una costante e può essere portata fuori dal segno di limite) $= +\infty$ (perché $K > 1$, e dunque K^n è un esponenziale, più veloce di n). Quindi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ e pertanto, per $\boxed{0 < x < 12}$, la serie data <u>DIVERGE</u>.

Consideriamo ora il caso $\boxed{x > 12}$ oppure $\boxed{x < -12}$.

In questo caso, si può studiare la <u>convergenza assoluta</u>. Vedremo che in effetti la serie <u>converge assolutamente</u> per $x \in]12, +\infty[\cup]-\infty, -12[$. In generale, conviene sempre studiare la convergenza assoluta, perché una serie che converge assolutamente è anche convergente, e quindi lo studio della serie dei valori assoluti consente spesso (come in questo caso) di risolvere contemporaneamente due sottocasi (nel nostro esercizio, $\boxed{x>12}$, $\boxed{x<-12}$). In questo modo, avremo un procedimento più rapido.

Ricordiamo che la serie data è $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{n x^2}$,

e quindi la serie dei valori assoluti è

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{|x|}\right)^n \cdot \frac{1}{n x^2}$ Posto $H = \frac{12}{|x|}$, si ha

$0 < H < 1$. Infatti $x > 12$ oppure $x < -12$ è equivalente a dire $|x| > 12$ (ripassare le disequazioni con il valore assoluto!) cioè $\frac{12}{|x|} < 1$ ($|x|$ è positivo, quindi quando divido per $|x|$ non devo cambiare il segno; inoltre naturalmente $\frac{12}{|x|} > 0$). Si ha:

$\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{x^2} \lim_{n\to+\infty} H^n \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$, perché $0 < H < 1$.

Quindi ancora non si può dire nulla sulla serie $\sum_{n=1} c_n$, perché il limite del suo termine generale è 0.

Applichiamo il criterio della radice alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Si ha: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{12}{|x|}\right)^n \cdot \frac{1}{n x^2} \right)^{\frac{1}{n}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\left(\frac{12}{|x|}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n x^2} \right)^{\frac{1}{n}} \right) =$ (proprietà delle potenze) $=$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{12}{|x|}\right)^{\cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{n}} \right) =$ (proprietà dei limiti)

$= \frac{12}{|x|} \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}}_{=1}} \cdot \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} (x^2)^{1/n}} = \frac{12}{|x|} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{12}{|x|} \boxed{<1}.$

(limite quasi notevole)

Pertanto, per il criterio della radice, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ CONVERGE. Quindi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, e dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{\text{CONVERGE}}$, per $\boxed{x>12}$ oppure $\boxed{x<-12}$.

Esaminiamo ora il caso $\boxed{x=12}$: la serie diventa

$\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\left(\frac{12}{12}\right)^n} \cdot \frac{1}{n \cdot 12^2} = \frac{1}{12^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, perché la costante $\frac{1}{12^2}$, com'è stato visto in altro materiale del corso, può essere portata fuori dal segno di serie. Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, allora la serie data, per $x=12$, DIVERGE.

Sia ora $\boxed{x=-12}$. La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{-12}\right)^n\cdot\frac{1}{n\cdot 12^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{144\cdot n}.$$

Poniamo $b_n=\frac{1}{144\cdot n}$. Dimostriamo che la successione $(b_n)_n$ è strettamente decrescente, cioè $b_n>b_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Si ha: $b_n>b_{n+1} \xLeftrightarrow{\text{se e solo se}} \frac{1}{144n}>\frac{1}{144(n+1)} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow$ (passando ai reciproci) $n<n+1$, sempre vero.

Inoltre, $\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{144\cdot n}=\frac{1}{144}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Pertanto sono verificate <u>tutte</u> le ipotesi del 1° criterio di Leibnitz, e quindi, per $\boxed{x=-12}$, la serie $\boxed{\text{CONVERGE}}$.

(N.B.: per $x=-12$, la serie non converge assolutamente, altrimenti la nostra serie sarebbe stata convergente per $x=12$)

Studiamo ora il caso $\boxed{-12<x<0}$. Poniamo $t=-x$, da cui $x=-t$. Si ha: $-12<-t<0$, quindi $\boxed{0<t<12}$.

Si ha: $a_n=\left(\frac{12}{x}\right)^n\cdot\frac{1}{nx^2}=\left(\frac{12}{(-1)\cdot t}\right)^n\cdot\frac{1}{n\cdot(-t)^2}=$

$=\left(\frac{12}{-1}\right)^n\cdot\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{t^2}=(-12)^n\cdot\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{t^2}=(-1)^n\cdot 12^n\cdot\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{t^2}=$

$=(-1)^n\cdot\left(\frac{12}{t}\right)^n\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\cdot b_n$, ove $b_n=\left(\frac{12}{t}\right)^n\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{n}$.

Poiché $0<t<12$, allora $\boxed{\frac{12}{t}>1}$.

Dimostriamo che la successione $(b_n)_n$, ove

$$b_n = \left(\frac{12}{t}\right)^n \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{n} \qquad \left(\text{con } t \text{ fissato, e } t>0, \frac{12}{t}>1\right)$$

è strettamente crescente (almeno) a partire da un intero positivo n' (che in generale dipende da t).

Si ha: $b_n < b_{n+1} \xLeftrightarrow[\text{solo se}]{\text{se e}} \left(\frac{12}{t}\right)^n \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{n} < \left(\frac{12}{t}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{n+1}$

$$\Longleftrightarrow \cancel{\left(\frac{12}{t}\right)^n} \cdot \cancel{\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{n} < \cancel{\left(\frac{12}{t}\right)^n} \cdot \frac{12}{t} \cdot \cancel{\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow$$

$\frac{1}{n} < \frac{12}{t} \cdot \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow$ ("Trucco": dobbiamo ricavarci n' e stabilire $n \geq n'$: quindi, dalla disequazione precedente, $\boxed{\text{RICAVIAMOCI } n}$, tenendo conto che t è fissato)

$$\xLeftrightarrow{\text{Moltiplichiamo per } n(n+1)} n+1 < \frac{12}{t} \cdot n \Longleftrightarrow \frac{12}{t}n - n > 1 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow n \cdot \left(\frac{12}{t} - 1\right) > 1$ Siccome $\frac{12}{t} > 1$, allora $\frac{12}{t} - 1 > 0$.

Sia $K_t = \frac{12}{t} - 1$. La disequazione diventa $n K_t > 1$, cioè $n > \frac{1}{K_t}$.

Se n' è il primo intero maggiore o uguale di $\frac{1}{K_t}$, allora per ogni $n \geq n'$ si avrà $b_n < b_{n+1}$. Siccome una serie non cambia il suo comportamento se si esclude un numero finito di termini, allora – senza perdita di generalità – si può studiare la serie di partenza a partire da n' (n' in generale dipende da t, ma tanto t è fissato). Per il 3° criterio di Leibnitz, allora, la serie data per $-12 < x < 0$ è INDETERMINATA.

RICAPITOLANDO, la serie data $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n}{n \cdot x^{n+2}}}$, $x \neq 0$:

$$\begin{cases} \text{Converge} & \text{per} \quad x > 12 \\ \text{diverge} & \text{per} \quad 0 < x \leq 12 \\ \text{è indeterminata} & \text{per} \quad -12 < x < 0 \\ \text{Converge} & \text{per} \quad x \leq -12 \end{cases}$$

N.B.: Per $x > 12$ la serie converge assolutamente;
per $x < -12$ la serie converge assolutamente;
per $x = -12$ la serie converge, ma <u>NON</u> <u>assolutamente</u>.

Esercizio

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$$

Intanto, ~~st~~ studiamo la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ove $c_n = |a_n|$, $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot x^n$, e quindi

$c_n = \frac{n}{n+1} |x|^n$. Applichiamo il criterio della RADICE. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot |x|^n\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(|x|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot$$

• $\lim_{n\to+\infty} |x|^{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}$ (proprietà delle potenze) $= |x| \cdot$

• $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Trucco: } f^g = e^{g \cdot \ln f}}{\underset{f = \frac{n}{n+1} \quad g = \frac{1}{n}}{=}} |x| \cdot \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} =$

(la funzione esponenziale è CONTINUA ...)

$$|x| \cdot e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = |x| \cdot e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)}$$

(principio di sostituzione degli infiniti) $= |x| \cdot \underset{1}{\underbrace{e^{0 \cdot 0}}} = |x|$

Per $\boxed{|x| < 1}$, cioè $\boxed{-1 < x < 1}$ (ripassare le disequazioni con il valore assoluto!), il criterio della radice ci dice che la serie data converge assolutamente, e quindi $\boxed{\text{converge}}$.

Per $\boxed{x=1}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

$a_n = \frac{n}{n+1}$. Facendo il limite del termine generale, si ha:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}^{1}}{\cancel{n}} = 1 \neq 0$ (principio di sostituzione degli infiniti),

e pertanto la serie data, per $x=1$, DIVERGE.

Per $\boxed{x>1}$, si applica il criterio della radice alla serie data $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$, ove $a_n = \frac{n}{n+1} x^n$.

Procedendo in modo analogo a come abbiamo fatto quando abbiamo studiato la serie dei valori assoluti, si ottiene $\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = x$. Ma poiché stavolta $x>1$, il criterio della radice afferma che, in questo caso, la serie data DIVERGE.

Per $\boxed{x=-1}$ la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Poniamo $b_n = \frac{n}{n+1}$ e dimostriamo che $(b_n)_n$ è una successione strettamente crescente, cioè $b_n < b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si ha: $b_n < b_{n+1} \iff \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1+1} \iff$ (facciamo il "prodotto a croce", cosa che è possibile perché le nostre quantità sono POSITIVE) $\iff n(n+2) < (n+1)^2 \iff \cancel{n^2} + \cancel{2n} < \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 \iff 0 < 1$, sempre vero. Quindi sono verificate le ipotesi del 3° criterio di Leibnitz, è la serie data è INDETERMINATA per $\boxed{x=-1}$.

Analizziamo ora il caso $\boxed{x<-1}$.

Poniamo $x=-t$, si ha allora $t=-x$, $\boxed{t>1}$

e la serie data $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ si esprime come

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}((-1)\cdot t)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}t^n$. Poniamo

$b_n=\frac{n}{n+1}t^n$, e dimostriamo che $(b_n)_n$ è una

successione strettamente crescente (ove $t>1$ è un numero FISSATO), cioè che $b_n<b_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Si ha: $b_n<b_{n+1} \iff$

$\frac{n}{n+1}t^n<\frac{n+1}{n+2}t^{n+1} \iff \frac{n}{n+1}\cdot\cancel{t^n}<\frac{n+1}{n+2}\cancel{t^n}\cdot t$, da cui

(facendo il prodotto a croce, che si può fare perché le nostre quantità sono tutte positive)

$n(n+2)<(n+1)^2t$, cioè $n^2+2n<(n^2+2n+1)\cdot t$,

che è vero sempre, in quanto $n^2+2n<n^2+2n+1$ è sempre vero, e inoltre $t>1$. Pertanto la successione $(b_n)_n$ è strettamente crescente, e quindi, per il 3° criterio di Leibnitz, la serie data, per $\boxed{x<-1}$, è INDETERMINATA.

RICAPITOLANDO,

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{DIVERGE} & \text{per } x \geq 1 \\ \text{CONVERGE} & \text{per } -1 < x < 1 \\ \text{È INDETERMINATA} & \text{per } x \leq -1 . \end{cases}$$

(Inoltre, per $-1 < x < 1$, la serie data <u>converge assolutamente</u>)

ESERCIZI SULLE SERIE

Esercizio 1

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^{4/3}}$$

Procediamo tenendo presente lo schema di risoluzione delle serie di cui nella SCHEDA DIDATTICA.

Innanzi tutto, osserviamo che la serie data <u>non è</u> una serie geometrica, e neanche armonica generalizzata.

Si tratta di una serie a termini <u>non negativi</u>.

Facciamo il limite del termine generale

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^{4/3}} \quad (x \text{ è fissato, } n \text{ varia})$$

Si ha: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{4/3}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Inoltre, la successione $(|\cos(nx)|)_n$ (con x fisso) è una successione LIMITATA, in quanto

$$0 \le |\cos(nx)| \le 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ ed } x \in \mathbb{R}.$$

Poiché, nelle regole sui limiti, si ha

$$\boxed{0 \cdot \text{LIMITATA} = 0},$$

allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^{4/3}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{|\cos(nx)|}_{\text{LIMITATA}} = 0.$

Quindi, per il momento, non possiamo dire ancora nulla.

Applichiamo ora il CRITERIO DEL CONFRONTO.

[Visto che $0 \leq |\cos(nx)| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, allora può venire in mente l'idea di confrontare la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^{4/3}}$ con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$.]

Si ha, $\forall n, \forall x$, $0 \leq \frac{|\cos(nx)|}{n^{4/3}} \leq \frac{1}{n^{4/3}}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ è armonica generalizzata del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a}}$ con $a = \frac{4}{3} > 1$, e quindi CONVERGE. Quindi, per il criterio del confronto, la serie data <u>CONVERGE per ogni</u> $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}{n^2} \qquad a_n = \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}{n^2} =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2}$$

Anche qui procediamo secondo lo schema che c'è nella SCHEDA DIDATTICA.

Innanzi tutto, notiamo che la serie data non è né geometrica né armonica generalizzata.

Si tratta di una serie a termini positivi.

Facciamo il limite del termine generale, $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Si ha: $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} + \cancel{(n+1)^{\frac{1}{3}}}}{n^2} =$ (per il principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}-2} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Quindi, ancora non possiamo dire nulla.

MA, studiando il limite del termine generale, ci siamo fatti un' idea di questa serie: "somiglia tanto" alla serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Allora confrontiamola con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, applicando il criterio del <u>CONFRONTO ASINTOTICO</u>, che in generale è più rapido di quello del confronto.

Sia dunque $a_n = \dfrac{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2}$, $\boxed{b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}}$

Si ha: $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\dfrac{n^{1/2} + (n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} =$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{2}} + \cancel{(n+1)^{1/3}}}{n^{2-\frac{3}{2}}} =$

$=$ (per il principio di sostituzione degli infiniti)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cancel{n^{1/2}}}{\cancel{n^{1/2}}} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ che è un valore "buono" per

il criterio del confronto asintotico, in quanto $1 \neq 0$ ed $1 \neq +\infty$. Pertanto le due serie

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ hanno lo

stesso comportamento. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ è

una serie armonica generalizzata del tipo $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^a}$, con $a = \dfrac{3}{2} > 1$, e pertanto converge.

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie data $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1} \dfrac{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^2}$

CONVERGE.

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^3+6n^7}$$

Studiare, al variare di $x\in\mathbb{R}$, la serie

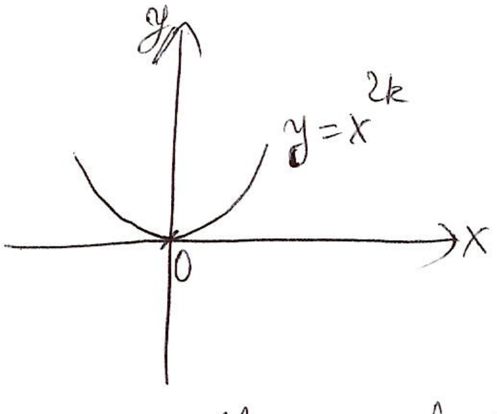
$$a_n = x^{2n^3+6n^7} \quad \left(\begin{array}{c} x \text{ è fissato,} \\ n \text{ varia} \end{array}\right)$$

Innanzi tutto, osserviamo che, per ogni $x\in\mathbb{R}$, siamo in presenza di una serie a termini positivi (per $x\neq 0$) oppure i termini sono tutti nulli (per $x=0$, e allora in tal caso la serie banalmente converge a 0 perché diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0+0+\ldots+0+\ldots=0$).

Perché, per $x\neq 0$, i termini della nostra serie sono tutti quanti <u>positivi</u>?

<u>TRUCCO</u>: Perché, per ogni $n\in\mathbb{N}$, l'esponente è sempre un numero PARI, perché è $2n^3+6n^7 = 2(n^3+3n^7)$

[La funzione $y=x^{2k}$ assume valori <u>strettamente</u> positivi per $x\neq 0$ e si annulla solamente per $x=0$]



Seguendo lo schema sulla risoluzione delle serie che è sulla SCHEDA DIDATTICA, notiamo innanzi tutto che la nostra serie non è armonica generalizzata.

Inoltre, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^3+6n^7}$ non è geometrica.

È vero che, per le proprietà delle potenze, si ha

$\boxed{x^{2n^3+6n^7} = \left(x^{2n^2+6n^6}\right)^n}$, però notiamo che

l'espressione $x^{2n^2+6n^6}$ CONTIENE n, e pertanto

$x^{2n^3+6n^7}$ non è del tipo q^n. Pertanto, la nostra

serie non è geometrica.

Ma da questa espressione possiamo avere un'idea per risolvere la serie. Infatti, poiché ci sono (potenze di) potenze, applichiamo il criterio della radice. Si ha:

$$a_n = x^{2n^3+6n^7}, \quad \sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} = \left(x^{2n^3+6n^7}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$=$ (per le proprietà delle potenze: dove ha senso, $(a^b)^c = a^{bc}$)

$$= x^{(2n^3+6n^7)\cdot(1/n)} = x^{2n^2+6n^6}, \text{ e pertanto}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} x^{2n^2+6n^6} = \lim_{n\to+\infty} x^{2(n^2+3n^6)} = \text{(ancora una volta)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(x^2\right)^{n^2+3n^6}$$ (Così ci assicuriamo di avere una base POSITIVA)

Studiamo il limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} (x^2)^{n^2+3n^6}.$$

Per $x^2>1$ (cioè $x\in]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$)
(perché le radici di $x^2-1=0$ sono 1 e -1, e quindi si prendono i valori ESTERNI) si ha

$$L = \lim_{n\to+\infty} (x^2)^{n^2+3n^6} = +\infty, \text{ in quanto } x^2>1$$

ed inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+3n^6)=+\infty$.

Per $x^2<1$ (cioè $-1<x<1$, questa volta si prendono i valori INTERNI) si ha $L=0$,
in quanto l'esponente tende a $+\infty$, ma la base è <u>compresa</u> <u>fra 0 e 1</u> (1 escluso)

[Questo fatto non deve fare ingannare. Per esempio, si ha $0<\frac{1}{2}<1$, e $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} =$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n} = \frac{1}{+\infty} = 0]$$

Per $x^2=1$, cioè $x=1$ oppure $x=-1$, si ha

$(x^2)^{n^2+3n^6} = 1^{n^2+3n^6} = 1$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}(x^2)^{n^2+3n^6} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Pertanto

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(x^2\right)^{n^2+3n^6} = \begin{cases} +\infty & \text{per } x>1 \text{ oppure } x<-1 \\ 1 & \text{per } x=1 \text{ oppure } x=-1 \\ 0 & \text{per } -1<x<1 \end{cases}$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie data

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^3+6n^7}$$

converge per $-1<x<1$, diverge per $x>1$, diverge per $x<-1$. Per $x=1$ oppure $x=-1$, il criterio della radice NON DÀ INFORMAZIONI, in quanto $L=1$.

Allora i casi $x=1$ ed $x=-1$ vanno CONSIDERATI A PARTE. Per $x=1$, la nostra serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^{2n^3+6n^7} = \sum_{n=1} 1 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots$$

diverge a $+\infty$.

Per $x=-1$, la nostra serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n^3+6n^7} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2\cdot(n^3+3n^7)} =$$

(proprietà delle potenze, sempre $a^{bc} = (a^b)^c$, dove ha senso)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^2\right]^{n^3+3n^7} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^{n^3+3n^7} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 =$$

$= 1+1+1+\ldots+1+\ldots$ diverge a $+\infty$.

<u>Ricapitolando</u>: la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^3+6n^7}$$

$$\begin{cases} \text{diverge}, & \text{per } x \geq 1 \\ \text{converge}, & \text{per } -1 < x < 1 \\ \text{diverge}, & \text{per } x \leq -1 \end{cases}$$

Alla luce del procedimento dell'Esercizio 3, svolgiamo il seguente

Esercizio 4. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3}{\left(\sin \frac{1}{n^6}\right)^2} \cdot x^{2n^3+6n^7}$$

Come nell'Esercizio 3, siamo davanti alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0+0+\ldots+0+\ldots$ che converge a 0 per $x=0$, ed a una serie a termini strettamente positivi per $x \neq 0$.

L'espressione $e^{\frac{1}{n^4}}-1$ fa pensare al limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (che è 1), mentre l'espressione $\left(\sin \frac{1}{n^6}\right)^2$ fa pensare al limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

I limiti notevoli ci fanno pensare al
CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

Procediamo per gradi.

Intanto, ripassiamo il limite notevole

$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Applicando la regola de l'Hôpital, si ha:

$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{D(e^x - 1)}{Dx} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1,$$

ove il simbolo D denota la derivata.

Ora vediamo il limite notevole

$$l_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Applicando la regola de l'Hôpital, si ha

$$l_2 = \lim_{x \to 0} \frac{D(\sin x)}{Dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Consideriamo ora il limite

$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^4}} - 1}{\frac{1}{n^4}}$. Questo limite è uguale a 1:

infatti, ponendo $x = \frac{1}{n^4}$, siccome n tende a $+\infty$,

x tende a 0, perché $\frac{1}{(+\infty)^4} = \frac{1}{+\infty} = 0$, e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^4}} - 1}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Da ciò deriva che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3}{\left(\frac{1}{n^4}\right)^3} = 1^3 = 1$$

, cioè, applicando sempre le proprietà delle potenze,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3}{\frac{1}{n^{12}}} = 1,$$

cioè il termine $\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3$ è asintotico a $\frac{1}{n^{12}}$, ossia si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{12}}$ (al tendere di n a $+\infty$)

Teniamolo presente.

Passiamo ora al limite

$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n^6}$. Questo limite è uguale a 1: infatti, ponendo $x=\frac{1}{n^6}$, poiché n tende a $+\infty$, allora x tende a 0 $\left(\frac{1}{(+\infty)^6}=\frac{1}{+\infty}=0\right)$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Da ciò deriva che $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n^6}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^6}\right)^2} = 1^2 = 1}$, cioè, sempre per le proprietà delle potenze, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n^6}\right)^2}{\frac{1}{n^{12}}} = 1$$. Quindi il termine $\left(\sin\frac{1}{n^6}\right)^2$

è asintotico a $\frac{1}{n^{12}}$ (al tendere di n a $+\infty$), cioè

si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{12}}$.

Ma allora il termine

$$\frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3}{\left(\sin\frac{1}{n^6}\right)^2}$$ si comporta come se fosse $\frac{\frac{1}{n^{12}}}{\frac{1}{n^{12}}} = 1$

(Si semplifica la vita!),

e allora la serie data

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^3}{\left(\sin\frac{1}{n^6}\right)^2} \cdot x^{2n^3+6n^7}$$

si comporta come la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^3+6n^7}$, cioè come la serie dell'Esercizio 3,

la quale sappiamo già che

$$\begin{cases} \text{diverge, per } x \geq 1 \\ \text{converge, per } -1 < x < 1 \\ \text{diverge, per } x \leq -1 \end{cases}$$

[Comincia a vedersi il Parnassum anche dal lato 2, tappa 2]

ESERCIZIO – Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie $\boxed{-49-}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n^{48}}\right)^2}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{32}}\right)^3} \cdot \frac{n}{\left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{n^3}}$$

Innanzi tutto, notiamo che la quantità $3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)$ è sempre strettamente maggiore di 1 per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si noti che l'arcotangente assume valori sempre compresi fra $-\frac{\pi}{2} \simeq 1.57$ e $\frac{\pi}{2} \simeq 1.57$, estremi esclusi). Quindi siamo di fronte a una serie a termini positivi, e dunque possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, osservando che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \text{ e quindi } 1 = 1^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n^{48}}}{\frac{1}{n^{48}}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n^{48}}\right)^2}{\frac{1}{n^{96}}}, \text{ ed } 1 = 1^3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{32}}}{\frac{1}{n^{32}}}\right)^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{32}}\right)^3}{\frac{1}{n^{96}}}.$$

Pertanto $\left(\sin \frac{1}{n^{48}}\right)^2$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{96}}$, come anche $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{32}}\right)^3$ si comporta come $\frac{1}{n^{96}}$, e dunque, poiché evidentemente $\frac{1}{n^{96}}$ ed $\frac{1}{n^{96}}$ si elidono, allora la serie data si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{n^3}}$, che studiamo con il criterio della radice. Si ha: $\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{n^3}}\right)^{\frac{1}{n}} =$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}}^{=1,\ \text{limite notevole}}}{\lim_{n\to+\infty} \left[\left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{\frac{n^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{n}}}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0,$$

in quanto $3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14) > 1$, e quindi $\lim_{n\to+\infty} \left(3+\operatorname{arctg}(x^2-4x+14)\right)^{n^2} = +\infty$.
Questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, in virtù del criterio della radice, la serie data CONVERGE per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO - Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4\right)^{n^9}}$$

Notiamo innanzi tutto che la quantità $x^{16}+3$ è sempre positiva per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, e quindi la serie è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, poiché il seno assume sempre valori compresi tra -1 ed 1 (estremi compresi), allora $\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4$ è sempre positivo, addirittura è sempre strettamente maggiore di 1. Siamo dunque davanti a una serie a termini positivi, e pertanto possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, osservando che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Pertanto $\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$, e inoltre $1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$

Quindi $1-\cos\frac{1}{n}$ si comporta come $\frac{1}{n^2}$, ed anche $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^2}$, e pertanto, siccome evidentemente $\frac{1}{n^2}$ ed $\frac{1}{n^2}$ si eliminano, allora la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4\right)^{n^9}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4}\right)^{n^9}.$$

Per studiare questa serie, applichiamo il criterio della radice. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4}\right)^{\frac{n^9}{n}} = 0,$$

in quanto $\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4 > 1$, e quindi $0 < \frac{1}{\sin\left(\frac{x^4-12}{x^{16}+3}\right)+4} < 1$. Pertanto, in virtù del criterio della radice, la serie data <u>CONVERGE</u> per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$$

e calcolare la somma

(Suggerimento: per la somma, applicare la FORMULA DI HERMITE, che è quella che si usa sugli integrali).

Se vogliamo vedere intanto la convergenza, essendo la nostra serie a termini positivi, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico: infatti $(2n+1)\cdot(2n+3) = 4n^2+2n+6n+3 = 4n^2+8n+3$ "somiglia" a $4n^2$ (perché, per il PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI, la quantità $8n+3$, di grado inferiore, può essere trascurata). Poniamo quindi $a_n = \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Si ha:

$$\boxed{L} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2+8n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}}{4\cancel{n^2}} = \boxed{\frac{1}{4} \begin{matrix}\neq 0\\ \neq \infty\end{matrix}}$$

Pertanto sono verificate le ipotesi del criterio del confronto asintotico, e quindi le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento. Ma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché è la SERIE ARMONICA GENERALIZZATA del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, con $a=2>1$ (quindi converge), e allora la serie data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.

Adesso vediamo la somma. Ricordiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}.$$

Applichiamo ora la FORMULA DI HERMITE, cioè poniamo

$$\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \overset{*}{=} \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3},$$

ove A e B sono due costanti reali da determinare.

Si ha

$$\frac{1\ \boxed{(=0\cdot n+1)}}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{A(2n+3)+B(2n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)} =$$

$$= \frac{2An+2Bn+3A+B}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \boxed{\frac{(2A+2B)n+(3A+B)}{(2n+1)\cdot(2n+3)}}$$

Per il principio di identità dei polinomi, si deve avere

$$\begin{cases} \cancel{2}A+\cancel{2}B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} B=-A \\ 3A-A=1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2A=1 \\ \boxed{A=\frac{1}{2}} \end{matrix} \quad \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

Pertanto, sostituendo nella formula $*$ i valori qui trovati di A e B, si ottiene

$$\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3},$$

e pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$ Quindi il termine generale a_n della nostra serie lo esprimiamo come

$a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$. Per calcolare la somma della serie, APPLICHIAMO DIRETTAMENTE LA DEFINIZIONE DI SERIE E DI SOMMA S, cioè $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ (ossia, limite della successione delle somme parziali). Si ha:

$a_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \quad a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$

$a_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \quad S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7}\right) \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \frac{1}{9}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7} + \ldots \frac{1}{2n-1} - \cancel{\frac{1}{2n+1}} + \cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right)$

(vanno via tutti i termini, tranne $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2n+3}$)

Quindi $S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right)$, e $\boxed{S = \text{somma}} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (per definizione!) $= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$.